**ALUMNO: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, Nº: \_\_\_, SECCIÓN: \_\_\_\_**

**PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO y PRINCIPIO ADITIVO**

Contar objetos, contar palabras, contar grupos,… Contar a veces es muy fácil, como cuando contamos huevos mientras los acomodamos en cartones de a 30. No es tan fácil cuando queremos contar en un teatro con 2.000 personas, las manos levantadas que aprueban cierta propuesta y es todavía más confuso cuando queremos contar todas las posibles formas de extraer 3 nombres de una urna con 25 nombres o contar los números de 3 cifras que se pueden formar tomando los dígitos del conjunto {1, 2, 3, 4,5} sin repetir ningún dígito.

Piensa en el siguiente caso como ejemplo: En tu hogar dispones de 5 camisetas, 4 pantalones y dos pares de zapatos y en casa de tú mama dispones de 4 camisas, 4 pantalones y dos pares de zapatos. De acuerdo a las circunstancias tienes la alternativa de vestirte en tú casa o donde tú mamá. ¿Cuántas pintas diferentes puedes formar sin trasladar ropa de un lugar a otro?

**Si un suceso A presenta n1 maneras diferentes y una vez este suceso ha ocurrido un segundo suceso B se puede presentar en n2 maneras diferentes y así cuando ha ocurrido este, sucede un tercer suceso C que se puede presentar en n3 maneras diferentes  y así diferentes sucesos en nk formas, entonces el número total de maneras diferentes como pueden darse simultáneamente los sucesos es:   
n1\*n2\*n3\*...\*nk**

**Si se desea llevar a efecto una actividad, la cual tiene formas alternativas para ser realizada, donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de M maneras, la segunda alternativa puede realizarse de N maneras... y la última de las alternativas puede ser realizada de W maneras, entonces esa actividad puede ser llevada a cabo de: M + N +...+ W maneras.**

**¿Cómo podemos distinguir cuando hacer uso del principio multiplicativo y cuando del aditivo?**

Cuando se trata de una sola actividad, la cual requiere para ser llevada a efecto de una serie de pasos, entonces haremos uso del principio multiplicativo y si la actividad a desarrollar o a ser efectuada tiene alternativas para ser llevada a cabo, haremos uso del principio aditivo.

|  |  |
| --- | --- |
| **EJEMPLO 1:** Hay un club con 15 socios. Se desea elegir una mesa directiva formada por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección, suponiendo que un socio puede ocupar sólo un cargo? |  |
| **EJEMPLO 2:** Supongamos que existe un código de seguridad que intercala dos letras con dos números y deseamos saber el número de códigos que se pueden emitir en total.  Tomemos 26 letras y 10 números, entonces el número sería de: |  |
| **EJEMPLO 3:** Con los números dígitos (del o al 9), ¿Cuántos números pares de 5 cifras con un cero en la mitad podemos escribir? |  |
| **EJEMPLO 4:** Rafael Luna desea ir a las Vegas o a Disneylandia  en las próximas vacaciones de verano, para ir a las Vegas él tiene tres medios de transporte para ir de Chihuahua al Paso Texas y dos medios de transporte para ir del Paso a las Vegas, mientras que para ir del paso a Disneylandia él tiene cuatro diferentes medios de transporte, a) ¿Cuántas maneras diferentes tiene Rafael de ir a las Vegas o a Disneylandia?, b) ¿Cuántas maneras tiene Rafael de ir a las Vegas o a Disneylandia en un viaje redondo, si no se regresa en el mismo medio de transporte en que se fue? |  |

**TALLER Nº 1**

1. Un producto para su elaboración debe pasar por tres tipos de maquinas: A, B y C. Si hay cinco maquinas tipo A, 6 de tipo B y 4 de tipo C. ¿De cuántas maneras puede ser elaborado el producto si se pueden utilizar las maquinas indistintamente?
2. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si:
3. los números deben ser pares y los dígitos no repetidos?
4. los números deben empezar por dos, ser múltiplo de cinco y no tener cifras repetidas?
5. ¿Los números deben empezar por tres o por cinco?
6. En una ciudad los números telefónicos constan de 7 dígitos. ¿Cuántos números se pueden formar si:
7. la primera cifra es dos?
8. los tres primeros números deben ser 215?
9. ¿El número de la mitad debe ser múltiplo de dos o de cinco?
10. Una persona que desea cenar puede escoger entre cinco vinos, cuatro platos fuertes, 6 postres y 3 frutas diferentes. ¿De cuántas maneras puede ordenar:
11. una cena completa?
12. la cena si es abstemio?
13. la cena si dos de los postres no son de su agrado?
14. ¿Cuántas placas para automóvil pueden hacerse usando tres letras del abecedario seguidas de tres números del 0 al 9 que empiecen por A o por Z o por M?
15. Los billetes que una lotería emite para cada sorteo, tienen cuatro dígitos para el número principal y dos para la serie. ¿Cuántos billetes emite la lotería? ¿Cuántos de esos billetes tienen por serie 00 o 55?
16. El Baloto es el juego de azar en el cual la persona que compra un boleto, selecciona 6 números diferentes. Los números seleccionados deben estar entre 1 y 45. ¿De cuántas formas se puede jugar un baloto?
17. Un testigo de un accidente en el que el causante se dio a la fuga, le dijo a la policía que el número de la placa tenía tres letras RLH seguidas de tres dígitos, el primero de los cuales era un cinco. Si el testigo no puede recordar los últimos dos dígitos, pero está seguro que todos los dígitos eran diferentes. Determine el número máximo de registros de automóviles que la policía tendrá que revisar.
18. Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?
19. Supongamos que organizo una carrera, en la que participan 5 corredores. A los que ganan medalla les hago una foto subidos al podium. ¿Cuántas fotografías diferentes podría hacer?

**TÉCNICAS DE CONTEO (COMBINATORIA)**

La **combinatoria** es la rama de la matemática que tiene por objeto el estudio de los diferentes agrupamientos y ordenaciones que pueden recibir los elementos de un conjunto, con independencia de la naturaleza de los mismos.

A la hora de agrupar elementos de un conjunto, podemos tener presentes tres criterios: Considerar, o no, el **orden** de los elementos dentro de cada agrupación, **Repetir**, o no, los elementos dentro de cada agrupación, - Decidir el **número de elementos** que tendrán las agrupaciones.

En definitiva, nuestro problema consistirá en: dado un conjunto de **m** elementos, contar las maneras de agruparlos en grupos de **n** elementos considerando un criterio para el orden y un criterio para la posibilidad de repetición de los elementos.

Una primera aproximación al problema de contar las posibles agrupaciones dados ciertos criterios, es empezar por casos sencillos y representativos, y utilizar un **diagrama de árbol** (a veces basta con esbozarlo simplemente) para "dibujar" las posibles formas de ir construyendo las agrupaciones. Una vez hecho el árbol se puede contar directamente en él el número de muestras posibles. O si no, se puede utilizar el árbol para deducir ese número. Al final, el árbol nos permitirá deducir una fórmula general para cada caso. Luego, ya con las fórmulas en la mano, sólo hay que ver qué caso nos plantea un problema para aplicar directamente la fórmula adecuada, y... ¡ya está!

**PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN**

Supongamos que organizo una carrera, en la que participan 5 corredores. ¿De cuántas maneras posibles llegarán a la meta? (no se permite el abandono, ni cabe la posibilidad de un empate). Supón que los corredores son: A, B, C, D y E. Observa el diagrama.

La cuestión es: Si hay 5 corredores, tengo 5 posibles primeros puestos. Una vez determinado el primer puesto, me quedan 4 por llegar: por cada primero hay 4 posibles segundos. Una vez sé el primer y el segundo puesto, me quedan 3 por llegar: por cada primer y segundo puesto hay 3 posibles terceros. Ahora aún me quedan 2 por llegar: por cada primer, segundo y tercer puesto, hay 2 posibles cuartos. Y sólo falta uno por alcanzar la meta: por cada 4 llegados a meta, hay 1 solo posible último corredor.

Total: **5x4x3x2x1** posibles caminos. Eso es: **5!** y se lee **"5 factorial"** o **"factorial de 5"** que en este caso da 120 caminos posibles.

|  |
| --- |
|  |

Una agrupación o arreglo de los **m** elementos (m = 5, los 5 corredores), agrupados de **m** en **m**, (miro cómo llegan uno tras otro a la meta, sin dejar ninguno), **el orden es importante**, (quiero averiguar las diferentes llegadas a meta posibles. No es igual ABCDE que EDCBA) y **sin repetir elementos**, (no va a llegar B dos veces en la misma carrera) recibe el nombre de **PERMUTACIÓN DE m ELEMENTOS TOMADOS DE m EN m**. Su fórmula es 

**VARIACIONES SIN REPETICIÓN**

Supongamos que organizo una carrera, en la que participan 5 corredores. A los que ganan medalla (oro, plata y bronce) les hago una foto subidos al pódium. ¿Cuántas fotografías diferentes podría hacer? (Se entiende por diferente que el medallista del oro en una foto fuese plata en otra, o incluso no ganara nada). Supón que los corredores son: A, B, C, D y E. Observa el diagrama.

La cuestión es: Si hay 5 corredores, tengo 5 posibles primeros puestos. Una vez determinado el primer puesto, me quedan 4 por llegar: por cada primero hay 4 posibles segundos. Una vez sé el primer y el segundo puesto, me quedan 3 por llegar: por cada primer y segundo puesto hay 3 posibles terceros. Ahora aún me quedan 2 por llegar. Pero estos **ya no importan**.

Fijémonos en que, una vez sé quién ocupará cada escalón del pódium, ya tengo toda la información que necesito para saber cuántas posibles fotografías puedo hacer.

Total: **5x4x3** posibles caminos. Eso es: que en este caso da 60 caminos posibles.

|  |
| --- |
|  |

Una agrupación o arreglo de los **m** elementos (m = 5, los 5 corredores) agrupados de **n** en **n** (n = 3, los tres primeros, que son los que me interesa ver en qué orden llegan), **importa el orden**, (quiero averiguar cuántas fotos del pódium son posibles. No es igual ABC que BCA), **sin repetir elementos**, (no va a estar B en el escalón del oro y en el de la plata, a la vez) recibe el nombre de **VARIACIÓN SIN REPETICIÓN DE m ELEMENTOS TOMADOS DE n EN n**. La fórmula es 

**COMBINACIONES SIN REPETICIÓN**

Supongamos que organizo una carrera, en la que participan 5 corredores. A los que ganan medalla (oro, plata y bronce) los invito a cenar. ¿Cuántas cenas diferentes podría hacer? Supón que los corredores son: A, B, C, D y E. Observa el diagrama.

Inicialmente, no hay nada. Empieza la carrera y va transcurriendo. Entonces, llega el primer corredor a la meta. Y, esperamos a ver entrar los siguientes podría ser A el primero, B el segundo y C, D o E el tercero.

Consideremos ahora que el primero fue B. Bien pudiera llegar A el segundo y C el tercero, pero ¿voy a contar con esta posibilidad? ¡¿Qué más me da invitar a cenar a A y a B o a B y a A? Así que no considero el caso B-A porque el caso A-B ya lo contemplé. Y si B fue primero y C segundo, Tampoco voy a fijarme en el caso que A entre tercero.

¡Invitar a A, B y C a cenar es lo mismo que invitar a cenar a B, C y A!

No quiero repetir casos ya contemplados, porque **el orden de llegada de los corredores no me importa**.

La fórmula no es fácil de deducir del árbol, así que la deduciremos "pensando" un poco: Podría contar las variaciones de m (5) elementos en grupos de n (3). Eso sería 

Pero entonces estaría contando los mismos casos más de una vez. Debo dividir la cantidad encontrada por el número de veces que voy a repetir casos. ¿Cuánto es esto?

Dado un grupo de n elementos (en nuestro ejemplo n = 3, como el formado por A, B y C), cualquier permutación de esos n elementos me va a sobrar. ¡El número de veces que puedo repetirlos es exactamente Pn, o sea, n! (¡en nuestro ejemplo, repetiré el trío A-¡B-C exactamente P3, o sea, 3! **= 6** veces que serían: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA). Así que al total de grupos posibles he de eliminarle las veces que se repiten: **¡dividiendo por n!**

Total: que en este caso da 10 caminos posibles.

|  |
| --- |
|  |

Una agrupación o arreglo de los **m** elementos de un conjunto (m = 5, los 5 corredores) agrupados de **n** en **n** (n = 3, los tres primeros, que son los que voy a invitar a cenar), **NO importa el orden**, (una cena con A, B y C es como una cena con C, B y A), **sin repetir elementos**, (no voy a cenar con A y con A a la vez) recibe el nombre de **COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN DE m ELEMENTOS TOMADOS DE n EN n**. La fórmula es 

Veamos algunos ejemplos:

**EJEMPLO 1:** ¿De cuantas maneras pueden sentarse tres damas y dos caballeros en una fila de 5 asientos de modo que:

* 1. pueden hacerlo en cualquier sitio?
  2. las mujeres y los hombres no se separan?
  3. se sientan alternados?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**EJEMPLO 2:** Entre 5 matemáticos y 7 físicos hay que constituir una comisión de 2 matemáticos y 3 físicos. ¿De cuántas maneras podrá hacerse si:

1. todos son elegibles?
2. un físico particular ha de estar en la comisión?
3. dos matemáticos concretos tienen prohibido pertenecer a la comisión?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **EJEMPLO 3:** ¿Cuántos números de 3 cifras distintas pueden hacerse con las cifras {1, 3, 5, 7, 9}? | **EJEMPLO 4:** El primer día de clase 4 estudiantes llegaron al salón más temprano que el resto de sus compañeros, tuvieron la oportunidad de escoger entre los 6 asientos de la primera fila. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en la primera fila estos cuatro estudiantes? |

**TALLER N° 2**

1. Un indicador tiene 6 banderas. ¿Cuántas señales diferentes puede enviar colocando 3 banderas una sobre la otra en la asta?
2. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila 5 alumnos?
3. En el concurso de belleza de Miss Universo se suelen escoger 10 semifinalistas y luego se eligen 5 finalistas. ¿De cuántas maneras pueden ocupar las cinco primeras posiciones?
4. En un campeonato de fútbol intervienen 5 equipos. ¿De cuántas maneras pueden quedar clasificados?
5. En una fiesta hay 50 invitados. ¿Cuántos sonidos de copa hay a la hora de brindar, dado que todos brindan entre si (dos a dos) y nadie repite el brindis?
6. Una empresa desea emplear 6 hombres y 4 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede hacer la selección si los solicitantes son 9 hombres y 6 mujeres?
7. Una pareja invita a una fiesta 9 parejas más:
   1. ¿Cuántos saludos de mano son posibles si todas las personas lo hacen?
   2. ¿Cuántos saludos de mano son posibles si en la fiesta hay 3 personas que no se saludan?
   3. ¿Cuántas parejas de baile se pueden formar si todas las parejas están dispuestas a hacerlo?
   4. ¿Cuántas parejas de baile son posibles, si tres caballeros y su respectiva dama insisten en bailar sólo con su pareja?
8. En un grupo de 13 damas y 12 caballeros. ¿Cuántos comités de 5 personas pueden formarse:
   1. si pueden integrarse indistintamente?
   2. si puede integrarse únicamente con damas?
   3. si debe integrarse con dos caballeros y tres damas?
   4. si una dama y un caballero deben hacer parte siempre del comité?
9. Una persona posee CDs así: 4 de música clásica, 2 de música romántica y 3 de música bailable. Si desea organizarlos en un estante para nueve CDs, ¿De cuántas maneras lo puede hacer,
   1. si los coloca al azar?
   2. si debe colocar juntos los de la misma clase?
   3. si dos CDs determinados deben estar juntos?
   4. si tres CDs determinados deben estar juntos?
   5. si los de música romántica deben ocupar los extremos?
   6. si los de música clásica deben permanecer juntos?
10. En una plantilla de 25 jugadores de fútbol, suponiendo que los jugadores son polivalentes, ¿cuántas alineaciones del once titular se pueden hacer?
11. Se sortean dos premios entre 14 personas, de forma que no pueden tocarle a la misma persona los dos. ¿Cuántos resultados del sorteo son posibles?
12. ¿Cuántos partidos de Primera División se juegan en una temporada de la liga española de fútbol? (Son 20 equipos que juegan todos contra todos , una en casa y otra fuera).
13. Un estudiante debe responder 21 preguntas de un cuestionario de 30. ¿De cuántas formas puede hacer su selección si:
    1. si no hay condiciones iniciales para responder?
    2. debe responder obligatoriamente las 6 primeras preguntas?
    3. debe responder a 9 preguntas, como mínimo, de las 15 primeras?
    4. debe responder a 9 preguntas, como mínimo de las 15 primeras, pero 1 y 2 necesariamente están en el grupo de las seleccionadas?
14. En un plano hay 7 puntos, de los cuales no existen 3 que sean colineales. ¿Cuántas líneas rectas determinan?
15. Se tienen 7 libros y solo 3 espacios en una biblioteca, y se quiere calcular de cuántas maneras se pueden colocar 3 libros elegidos; entre los siete dados, suponiendo que no existan razones para preferir alguno.
16. ¿Cuántos números naturales se pueden escribir con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5, sin que se repita ninguno? ¿Cuántos terminan en 5? ¿Cuántos comienzan por 3? (pueden ser números con: desde 1 a 5 dígitos)
17. Le damos una carta de una baraja española a cada uno de tres jugadores. ¿Cuántos posibles repartos existen?

**BIBLIOGRAFIA**

* <http://club.telepolis.com/ildearanda/combina/esquema.html>
* <http://www.jesus-maria.net/bilbao/ciencias/Nueva%20carpeta/combinatoria.pdf>
* URIBE CALÁD, JULIO. MATEMÁTICA UNA PROPUESTA CURICULAR, UNDECIMO GRADO, TERCERA EDICIÓN, EDITORIAL BEDOUT EDITORES S.A., MEDELLÍN, 1996.