**Factorización**

Es el proceso que consiste en transformar un polinomio como producto de dos o más factores.

**1. Factor Común:** Este es el primer caso y se emplea para factorizar una expresión en la cual todos los términos tienen algo en común (puede ser un número, una letra, o la combinación de los dos).

Forma: 

**2. Factor Común por agrupación de términos:** Aquí utilizaremos el caso anterior, adicionando que uniremos los factores que se parezcan, es decir, los que tengan un factor común.

Forma: **ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x (a + b) + y (a + b) = (a + b) (x + y)**

**3. Trinomio cuadrado perfecto:** Este nombre es otorgado a los trinomios que cumplen con las siguientes características: Dos términos tienen raíz cuadrada exacta y son positivos, el otro término es igual a dos veces el producto de las raíces cuadradas y puede ser positivo o negativo. y se factoriza como una suma o diferencia, dependiendo del segundo término, elevado al cuadrado.

Forma: **a2 + 2ab + b2 = (a + b) 2**

**4. Diferencia de cuadrados:** Un binomio es una diferencia de cuadrados siempre y cuando los términos que la componen tengan diferentes signos y ambos términos tengan raíz cuadrada exacta.

Forma: **x2 – y2 = (x + y) (x – y)**

**5. Suma o diferencia de potencias iguales:** Clasificar la expresión en suma o diferencia, y el exponente en par o impar (suma de exponente par, no es factorizable). Dos factores: el primero corresponde a la suma o diferencia de la raíz n de los términos, y el segundo, son producto de potencias del primer y segundo término, los exponentes del primero disminuyen de 1 en 1 a partir de n – 1 y los exponentes del segundo término, aumentan de 1 en 1 a partir de cero. Si el binomio es diferencia todos los términos del polinomio son positivos, si el binomio es suma de exponente impar los signos del polinomio se alternan comenzando con positivo.

Forma: 

**NOTA:** La diferencia de potencias iguales de exponente par se puede factorizar comenzando por diferencia de cuadrados. La suma de potencias iguales de exponente par **NO ES FACTORIZABLE**. Por tanto, este caso se aplica especial mente a potencias impares.

**6. Trinomio cuadrado perfecto por adición o sustracción:** En este caso se intenta transformar una expresión (binomio o trinomio), en otra igual en la que se pueda aplicar trinomio cuadrado perfecto y luego diferencia de cuadrados.

Forma: 

**7. Trinomio cuadrado de la forma** x2 + bx + c: Este trinomio debe cumplir con las siguientes características: Debe estar organizado de acuerdo a su forma, el primer término debe ser positivo y tener raíz cuadrada exacta, la variable que está acompañando el segundo término debe ser la raíz cuadrada del término número uno y existen dos números que: **M + m = b y M.m = c**.

Es decir: **x2 + bx + c = (x + M) (x + m)**

**8. Trinomio cuadrado de la forma** ax2n + bxn + c: Debe cumplir con las siguientes características:

Debe estar organizado de acuerdo a su forma, el primer término debe ser positivo, tener un coeficiente a diferente de 1 y la parte literal debe tener raíz cuadrada exacta, la variable que está acompañando el segundo término debe ser la raíz cuadrada del término número uno. Cumpliendo con todas las características anteriores se procede a factorizar transformando el trinomio dado en uno de la forma x2n + bxn + c (a.) o por tanteo (b.).

1. 
2. Cuando los coeficientes son “pequeños” se recomienda el método del “tanteo” que consiste en descomponer el primer término y el ultimo termino en dos factores, de tal forma que al hacer el producto en cruz y sumar algebraicamente esos productos obtengamos el término de la mitad; luego, luego se escriben los términos en dos paréntesis recorriendo horizontalmente los factores.

**9. Cubo perfecto de Binomios:** Teniendo en cuenta que los productos notables nos dicen que: **(a ± b)3 = a3 ± 3a2b + 3ab2 ± b3**, es decir que debe cumplir con las siguientes características: Debe tener cuatro términos, que tanto el primero como el último término sean cubos perfectos, que el segundo término sea el triple del cuadrado de la raíz cúbica del primer término multiplicado por la raíz cúbica del último término, que el tercer término sea el triple de la raíz cúbica del primero multiplicado por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Forma: **= a3 ± 3a2b + 3ab2 ± b3 = (a ± b)3**

**10. Suma o Diferencia de Cubos perfectos:** Se caracteriza por ser binomio cuyos términos tienen raíz cúbica exacta. Para esto debemos recordar que:



La suma o diferencia de cubos se descompone en dos factores: La suma o resta de sus raíces cúbicas y, el cuadrado de la primera raíz, más o menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

EN RESUMEN: **FORMA DE DISTINGUIR LOS CASOS DE FACTORIZACIÓN**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | ¿La expresión tiene factor común? | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | ¿Qué tipo de expresión es? | |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| ¿Es un Binomio? | | ¿Es un trinomio? | | ¿Es un polinomio de 4 o más términos? | |
|
| ¿Es una diferencia de cuadrados? | | ¿Es un trinomio cuadrado perfecto? | | ¿Es factorizable por agrupación de términos? | |
|
| ¿Es una suma ó resta de cubos? | | ¿Es un trinomio de la forma x²±bx±c? | | ¿Es una suma ó resta de binomios al cubo? | |
|
| ¿Es una suma o diferencia de potencias iguales? | | ¿Es un trinomio de la forma ax²±bx±c? | | ¿Es un caso combinado? | |
|
| ¿Es una suma de cuadrados? | | ¿Es un trinomio cuadrado perfecto por completación? | | ¿Es factorizable por división sintética? | |
|

**Ejemplos:** Factorizar al máximo.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
| 1. x3y + x2y2 – 2xy |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| 1. m4 – 10m2n2 + 9n4 |  |
|  |  |
|  |  |

**TALLER N° 1**

Factorizar al máximo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 1. 5c2 + 11cd + 2d2 |  |
|  |  |  |
| 1. m2 + 19m + 48 | 1. 16x6y8 - 8 x3y4z7 + z14 | 1. x6 – y6 |
|  |  |  |
|  | 1. 289a2 + 68abc + 4b2c2 | 1. 2x2 - 17xy + 15y2 |
| 1. s2 - 14s + 33 |  |  |
|  | 1. 4x2 + 7x + 3 |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**TEORIA GENERAL DE ECUACIONES POLINOMICAS**

Llamamos polinomio a toda expresión de la forma: 

Donde **n** indica el grado del polinomio, luego **anxn** es el término de mayor grado, y **a0** es el término de menor grado o término independiente. **an , an-1** , etc. ... son los coeficientes de los distintos términos, y **x** es la variable inde­pendien­te.

**Ecuación polinómica**: Es el resultado de igualar a cero un polinomio. Es decir, sea  un polinomio cualquiera decimos que  es una ecuación polinómica.

**Solución de una ecuación**: Es un conjunto de valores que satisfacen a la ecuación. Los valores que satisfacen a la ecuación son los ceros del polinomio equivalente, los cuales se denominan raíces de la ecuación.

**Lema fundamental del álgebra**: Toda ecuación polinómica de grado  posee al menos una raíz real ó compleja.

**Teorema fundamental del álgebra**: Toda ecuación polinómica de grado  posee  y sólo  raíces.

**Axiomas**:

* Si una ecuación polinómica real entera posee una raíz compleja, su conjugada también es raíz de la ecuación.
* Si una ecuación polinómica racional entera posee una raíz irracional, su conjugada también es raíz de la ecuación.

**Algoritmo de la división:** Dados enteros D, d0, existen enteros c y r tales que D = dc + r y  . Al número D se le llama dividendo, d divisor, c cociente y r residuo.

**Regla de Ruffini o División Sintética:** Cuando tenemos que dividir un polinomio P(x) por uno de la forma ax + b, es conveniente utilizar la regla de Ruffini o la división sintética. Efectuamos la división de manera convencional y por Ruffini, expresemos el resultado usando el algoritmo de la división.

Dividir P(x) = x3 + 2x + 12 entre Q(x) = x + 2

|  |  |
| --- | --- |
| **División convencional** | **Regla de Ruffini o División Sintética** |
|  |  |

**Ecuación degradada**: Es la ecuación correspondiente al cociente que resulta de dividir la ecuación original entre una de sus raíces.

**Raíces múltiples**: Es aquella que es raíz de la ecuación original y de por lo menos una de sus ecuaciones degradadas.

**Grado de multiplicidad de una raíz**: Es el número de veces que un valor es raíz de una ecuación.

**Teorema del residuo**: El residuo de dividir un polinomio P(x) entre x – a es P(a).

**Teorema del factor**: En un polinomio P(x), x – a es un factor de P(x) si y solo si P(a) = 0.

**Teorema de los Ceros Racionales:** Sea y  donde “p” y “q” son primos entre sí, entonces “p” es un factor de “a0” y “q” es un factor de “an”.

Se deduce del teorema anterior que si an = 1, entonces sus raíces son divisores de a0.

**Fórmula general para ecuaciones cuadráticas:** Las soluciones de la ecuación cuadrática  con  se obtienen con: 

El listado de conceptos, definiciones, teoremas, lemas, algoritmos, reglas y fórmulas anteriores, permiten, cuando la aplicación de los casos de factorización se agote, Factorizar y por ende resolver, ecuaciones polinómicas.

Se recomienda:

1. Obtener las raíces nulas mediante extracción de factor común.
2. Para el polinomio degradado (segundo factor), obtener las posibles raíces racionales mediante la aplicación del teorema respectivo.
3. Utilizar el teorema del residuo para hallar la primera raíz y división sintética para encontrar la ecuación degradada.
4. Utilizar el teorema del factor y el algoritmo de la división para ir factorizando la ecuación.
5. A la última ecuación degradada repítele los pasos 2. al 5. Hasta obtener una ecuación degradada de grado 2, la cual debes Factorizar o en caso de no ser posible, aplicar la fórmula general para obtener las raíces complejas conjugadas o las raíces irracionales conjugadas.
6. Por último, obtiene todas las soluciones igualando cada factor a cero y despejando la variable.

Apliquemos lo visto en la factorización y solución de la ecuación polinómica:

1. P(x) = 9x5 + 12x4 – 53x3 – 20x2 + 12x = 0
2. P(x) = 10x5 – 19x4 – 84x3 + 156x2 + 32x – 32 = 0

**TALLER N° 2**

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. P(x) = 8x3 – 4x2 – 18x + 9 = 0
9. 
10. 